Towards Mathematical Sciences

Vol. 4, No. 1, Spring and Summer 2024, pp. 42–64

DOI.10.22067/tmsj.2024.88822.1060

Expository Article

https://tmsj.um.ac.ir

A NEW MODEL FOR GAMMA FUNCTION IN NATURAL NUMBER

ROSTAM MOHAMADIAN*

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical and Computer Sciences, Shahid Chamran University of Ahwaz, Ahwaz, IRAN
mohamadian_r@scu.ac.ir

Abstract. In this article, first, with a simple technique, we obtain a well-known formula about the gamma function and some theorems of Laplace transforms. After that, we mention a new formula, which can be used to calculate some not so convenient improper integrals, and also with the help of it and the Gaussian integral, we obtain a new convergence result regarding Hermite polynomials. Then with the help of the same formula, we obtain a new model for the gamma function in natural numbers.

2010 Mathematics Subject Classification. 00A05, 33B15.

Keywords. Power series, Laplace transform, Gamma function, Gauss integral, Hermite polynomials.

Date: Rceived 6-7-2024 Revised 17-7-2024 Accepted 19-7-2024 Available Online 27-9-2023

دوره ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳، صص. ۴۲–۶۴
DOI. 10.22067/tmsj.2024.88822.1060
مقاله علمی–ترویجی
https://tmsj.um.ac.ir

مدلی جدید برای تابع گاما در اعداد طبیعی

رستم محمدیان*

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز
mohamadian_r@scu.ac.ir

چکیده. در این مقاله ابتدا با تکنیکی ساده، یک فرمول شناخته‌شده درباره تابع گاما و چند قضیه از تبدیلات لاپلاس را به دست می‌آوریم. پس‌ازآن به فرمولی اشاره می‌کنیم که به کمک آن می‌توان برخی از انتگرال‌های ناسره نه‌چندان راحت را محاسبه کرد و هم‌چنین به کمک آن و انتگرال گوس، نتیجه همگرایی جدیدی در خصوص چندجمله‌ای‌های هرمیت به دست می‌آوریم. سپس به کمک همان فرمول، مدل جدیدی برای تابع گاما در اعداد طبیعی به دست می‌آوریم.

۱. پیش‌گفتار

در ریاضی و دیگر شاخه‌های علوم ازجمله فیزیک و مهندسی اهمیت تابع گاما، بتا، تبدیلات لاپلاس و مبحث همگرایی یا واگرایی سری‌ها و انتگرال‌های ناسره بر هیچ‌کس پوشیده نیست. در این مقاله ما با کمک سری‌های مکلورن و فرمولی دیده نشده، مطالبی را در خصوص این مفاهیم بیان می‌کنیم. مقاله به این صورت بخش‌بندی شده است که در بخش دوم که اندکی مقدماتی است با کمک تبدیل لاپلاس و سری هندسی، سری‌های مکلورن معروف را به دست آورده و با کمک سری دوجمله‌ای فرمولی مربوط به تابع گاما را ثابت می‌کنیم. در بخش سوم، قضایای مهم تبدیلات لاپلاس را فقط به کمک سری‌ها ثابت می‌کنیم. در بخش چهارم، با بهره‌گیری از

2010 Mathematics Subject Classification. 00A05, 33B15.

واژگان کلیدی. سری توانی، تبدیل لاپلاس، تابع گاما، انتگرال گوس، چندجمله‌ای‌های هرمیت..
تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۴/۱۶ بازنگری ۱۴۰۳/۴/۲۷ پذیرش ۱۴۰۳/۴/۲۹ انتشار برخط ۱۴۰۲/۷/۵

نحوه ارجاع به این مقاله: ر. محمدیان، مدلی جدید برای تابع گاما در اعداد طبیعی ، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۴۲–۶۴.

فرمولی، مقدار عددی برخی از انتگرال‌های ناسره نه‌چندان آسان را می‌یابیم. از آن جمله تعمیمی از تابع بتا و نتیجه همگرایی مهمی در خصوص چندجمله‌ای‌های هرمیت البته به کمک انتگرال گوس به دست می‌آوریم. پس‌ازآن نمایش جدیدی برای تابع گاما به ازای اعداد طبیعی به دست می‌آوریم. درنهایت اندکی به بحث درباره یک سری عددی خاص می‌پردازیم. ازآنجاکه مطالب حالت عمومی دارند می‌توانید برای دیدن جزئیات به تمام مراجع نگاه کنید.

۲. سری‌های هندسی و دوجمله‌ای و لاپلاس

در این بخش با کمک سری هندسی و تبدیلات لاپلاس، سری‌های مکلورن معروف را به دست می‌آوریم. فرض بر آن است که تمام شرایط موردنیاز برقرار هستند بدون آن‌که به آن‌ها اشاره‌کنیم. از آن جمله فرض بر آن است که توابع موردبحث با بسط مکلورن خود در بازه معلوم برابر بوده و هر جا سخن از تبدیل لاپلاس به میان می‌آید تابع به‌طور تکه‌تکه پیوسته و از مرتبه نمایی است. هم‌چنین لاپلاس و لاپلاس معکوس یک سری، برابر با لاپلاس یا لاپلاس معکوس تک‌تک جملات آن است.

مثال ۱.۲. *با فرض $0 < x < 1$ سری $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x = \frac{1}{p}$ که $p > 1$ در این صورت*

$$\frac{1}{p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n+1}}$$

بنابراین

$$L^{-1}(\frac{1}{p-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}(\frac{1}{p^{n+1}}).$$

درنتیجه

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

مثال ۲.۲. *سری $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x = \frac{1}{p}$ و $p > 0$. در این صورت*

$$\frac{p^2}{p^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{2n}}.$$

درنتیجه

$$\frac{1}{p^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

بنابراین

$$L^{-1}(\frac{1}{p^2+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L^{-1}(\frac{1}{p^{2n+2}}).$$

درنتیجه

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

به‌طور کاملاً مشابه می‌توان سری‌های مکلورن توابع $\cos(x)$ و $\sinh(x)$ و $\cosh(x)$ را به دست آورد.

مثال ۳.۲. *اگر* $L(f(x)) = \frac{p}{p^2+4}$*، آنگاه* $f(x)$ *را بیابید.*

حل: فرض کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

بنابراین

$$L(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{(2n)!}{p^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \frac{(2n+1)!}{p^{2n+2}}. \qquad (۱.۲)$$

از طرف دیگر با داشتن سری هندسی و با شرط $p > 2$ داریم

$$L(f(x)) = \frac{1}{p(1+\frac{4}{p^2})} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{p^{2n+1}}. \qquad (۲.۲)$$

از (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه می‌شود $(2n)! \cdot a_{2n} = (-1)^n 4^n$ و $a_{2n+1} = 0$. که ازآنجا خواهیم داشت $a_{2n} = \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} = \cos(2x).$$

در ادامه با همان تکنیک گفته‌شده و با کمک سری دوجمله‌ای یک فرمول معروف مربوط به تابع گاما را به دست می‌آوریم. با فرض $0 < x < 1$ سری دوجمله‌ای

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

را در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $m = \frac{-1}{2}$. در این صورت

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} x^n.$$

قرار می‌دهیم $x = \frac{1}{p^2}$. در این صورت

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \frac{1}{p^{2n}}$$

و درنتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \frac{1}{p^{2n+1}}.$$

حال

$$L^{-1}(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} L^{-1}(\frac{1}{p^{2n+1}})$$

پس

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

درنتیجه

$$\binom{\frac{-1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

و درنهایت داریم

$$\Gamma(\frac{1}{2}-n) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!} \Gamma(\frac{1}{2}).$$

۳. برخی از قضایای لاپلاس

در این بخش با همان تکنیک، قضایای شناخته‌شده مربوط به تبدیل لاپلاس از آن جمله قضیه کنولوسیون و فرمولی مربوط به تابع بتا را با کمک سری‌های مکلورن به دست می‌آوریم. فرض بر آن است که تابع $f(x)$ دارای سری مکلورن و همچنین تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ موجود است. به‌علاوه داریم $L(f(x)) = F(p)$ و همچنین شرایط جابجایی لاپلاس و سیگما فراهم است.

قضیه ۱.۳ (مشتق تبدیل لاپلاس). *اگر* $L(f(x)) = F(p)$*، آنگاه* $L(xf(x)) = -F'(p)$.

اثبات. فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{n!}{p^{n+1}} = F(p).$$

از طرف دیگر واضح است که:

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n+1},$$

و

$$F'(p) = -\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{n+1}{p^{n+2}}.$$

دوباره با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(xf(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{(n+1)!}{p^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{n+1}{p^{n+2}} = -F'(p),$$

که همان نتیجه مطلوب است.

□

قضیه ۲.۳ (تبدیل لاپلاس مشتق). *اگر داشته باشیم* $L(f(x)) = F(p)$*، آنگاه*

$$L(f'(x)) = pF(p) - f(0).$$

اثبات. واضح است که $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1}$ با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(f'(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^n} = p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}.$$

درنتیجه می‌توان نوشت:

$$L(f'(x)) = p(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} - \frac{f(0)}{p}) = pF(p) - f(0),$$

که همان نتیجه مطلوب است. □

به‌طور مشابه با روال فوق می‌توان تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه $n-$ ام تابع، یعنی $f^{(n)}(x)$ را به دست آورد. به‌عنوان نمونه می‌توان نشان داد

$$L(f''(x)) = p^2 L(f(x)) - pf(0) - f'(0).$$

قضیه ۳.۳ (تبدیل لاپلاس انتگرال). *اگر* $L(f(x)) = F(p)$*، آنگاه* $L(\int_0^x f(x)dx) = \frac{F(p)}{p}$.

اثبات. واضح است که

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$L(\int_0^x f(x)dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+2}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = \frac{F(p)}{p},$$

که همان نتیجه مطلوب است.

□

قضیه ۴.۳ (انتگرال تبدیل لاپلاس). *اگر* $L(f(x)) = F(p)$ *آنگاه با فرض* $f(0) = 0$ *داریم*

$$\int_p^\infty F(p)dp = L(\frac{f(x)}{x}).$$

اثبات. واضح است که $L(\frac{f(x)}{x}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}$. از طرف دیگر داریم $F(p) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}}$ بنابراین

$$\int_p^b F(p)dp = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{nb^n}$$

درنتیجه

$$\int_p^\infty F(p)dp = \lim_{b\to\infty} \int_p^b F(p)dp = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} = L(\frac{f(x)}{x})$$

و کار تمام است. □

قضیه ۵.۳ (انتقال). *اگر* $L(f(x)) = F(p)$*، آنگاه* $L(e^{ax}f(x)) = F(p-a)$.

اثبات.

$$L(e^{ax}f(x)) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} L(e^{ax}x^n) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} = F(p-a).$$

□

به‌عبارت‌دیگر برای دانستن $L(e^{ax}f(x))$ کافی است $L(e^{ax}x^n)$ را داشته باشیم.

قضیه ۶.۳ (کنولوسیون). *فرض کنیم* $f(x)$ *و* $g(x)$ *دو تابع با شرایط لازم باشند. در این صورت*

$$L(f*g) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{1}{p^{n+2}} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0).$$

اثبات. آشکار است که

$$L(f(x)) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = F(p),$$

$$L(g(x)) = \sum_{n=0}^\infty \frac{g^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = G(p).$$

بنابراین

$$L(f*g) = F(p)G(p) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{1}{p^{n+2}} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0).$$

□

به کمک فرمول فوق می‌توان مجموع برخی از سری‌های پیچیده را به دست آورد. برای راستی آزمایی، یک نمونه ساده در زیر ارائه می‌کنیم.

مثال ۷.۳. *فرض کنیم $f(x)=x$ و $g(x)=\sin(x)$ در این صورت بنا بر فرمول کنولوسیون می‌دانیم*

$$L(f*g)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

اکنون با انجام محاسبات می‌توان دید که

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p^{n+2}}f^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0)=\frac{1}{p^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n}}=\frac{1}{p^4}\frac{p^2}{p^2+1}=\frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

در ادامه تعمیمی ساده از تابع بتا را به دست می‌آوریم. تابع زیر را در نظر می‌گیریم.

$$B_a(m,n)=\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}dx$$

با تغییر متغیر $x=at$ به‌راحتی می‌توان دید که

$$B_a(m,n)=B(m,n)a^{m+n-1}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}a^{m+n-1}$$

که در آن $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ تابع معروف بتاست. اکنون به کمک فرمول‌های این بخش این گزاره را نشان می‌دهیم.

مثال ۸.۳ (تعمیم تابع بتا). *اگر از طرفین قضیه کنولوسیون لاپلاس معکوس بگیریم خواهیم داشت*

$$f*g=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+1)!}f^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0)x^{n+1}. \qquad (۱.۳)$$

از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned}f*g&=\int_0^x f(t)g(x-t)dt=\int_0^x\big[\big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n\big)\big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-t)^n\big)\big]dt\\&=\int_0^x\big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k\frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}(x-t)^{n-k}\big)dt\\&=\big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}\int_0^x t^k(x-t)^{n-k}dt\big). \qquad (۲.۳)\end{aligned}$$

اکنون از روابط (۱.۳) و (۲.۳) *نتیجه می‌شود*

$$\int_0^x t^k(x-t)^{n-k}dt=\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

با تغییر حروف می‌توان نوشت

$$\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}a^{m+n-1}.$$

۴. یافتن مقدار برخی از انتگرال‌ها به کمک فرمولی مهم

در این بخش با ساختن فرمولی به کمک سری‌های مکلورن و تبدیلات لاپلاس، دو هدف را دنبال می‌کنیم. یکی نشان دادن همگرایی و یافتن مقدار عددی برخی از انتگرال‌های مجازی به کمک سری‌هاست و دیگری نشان دادن همگرایی برخی از سری‌ها البته بدون دانستن جمله عمومی آن به‌طور شفاف به کمک انتگرال‌های مجازی. در شاخه‌هایی از ریاضی ازجمله در آنالیز گاه می‌بینیم که انتگرال‌های مجازی نوع اول و سری‌های عددی نامتناهی هم‌رفتارند که از آن جمله می‌توان به آزمون انتگرال برای همگرایی سری‌ها اشاره کرد. فرمول اصلی این بخش که هم‌اینک آن را ارائه می‌کنیم نشان می‌دهد که علاوه بر هم‌رفتاری مقدار آن دو نیز باهم برابر است و این موضوع اهمیت بالایی در محاسبات دارد. برای نمونه ازاین‌دست، مرجع [۷، قضیه ۵.۸.۳] را بنگرید. قضیه زیر که ابزار مفیدی در محاسبه انتگرال‌های ناسره برحسب سری‌هاست درواقع حالت کلی قضیه انتگرال تبدیل لاپلاس است که در بخش قبل به آن پرداختیم.

قضیه ۱.۴. *فرض کنیم بسط مکلورن تابع $f(x)$ روی بازه I موجود باشد. در این صورت با فرض آن‌که $x \in I - \{0\}$ داریم*

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(0)}{x}e^{-px}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}$$

اثبات. طبق فرض داریم $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1} = \frac{f(0)}{x} + \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1}.$$

اکنون با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین، با شرط وجود تبدیل لاپلاس و شرط وجود $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ داریم

$$L\Big(\frac{f(x)-f(0)}{x}\Big) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{(n-1)!}{p^n}.$$

درنتیجه می‌توان نوشت:

$$L\Big(\frac{f(x)-f(0)}{x}\Big) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}.$$

با توجه به تعریف لاپلاس خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(0)}{x}e^{-px}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}. \qquad \text{(فرمول اصلی)}$$

□

در ادامه به کمک این فرمول، چند انتگرال و سری را حساب می‌کنیم. اما پیش از آن به آزمون نسبت برای همگرایی این سری اشاره می‌کنیم که در اینجا ارتباطی سه‌گانه میان حد و مشتق و انتگرال را بیان می‌کند.

نکته ۲.۴ (آزمون نسبت). *فرض کنیم برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $f^{(n)}(0) \neq 0$ در این صورت برای p های مناسب می‌توان گفت که:*

(الف) انتگرال همگراست اگر $p > \lim_{n\to\infty} |\frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}|$.

(ب) انتگرال واگراست اگر $p < \lim_{n\to\infty} |\frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}|$.

(پ) آزمون بی‌نتیجه است اگر $p = \lim_{n\to\infty} |\frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}|$.

نکته ۳.۴. *فرمول اصلی را می‌توان در حالت دیگر و برای محاسبه انتگرال‌های دیگری به شرح زیر به دست آورد.*

$$\int_0^\infty \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} e^{-px} dx = \sum_{n=2}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n(n-1)p^{n-1}}.$$

به‌طورکلی می‌توان نوشت:

$$\int_0^\infty \frac{f(x) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}{x^{m+1}} e^{-px} dx = \sum_{n=m+1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n(n-1)\cdots(n-m)p^{n-m}}.$$

خاطرنشان کنیم که می‌توان در قضیه ۱.۴، بسط تیلر تابع را حول نقطه دلخواه c در نظر گرفت و صورت دیگری از این فرمول‌ها را به دست آورد.

به‌عنوان نمونه‌ای از نکته ۳.۴، انتگرال زیر را حساب می‌کنیم.

مثال ۴.۴. *فرض کنیم $f(x) = 1 - \cos(x)$ در این صورت اگر از سری مکلورن $\tan^{-1}(x)$ انتگرال بگیریم خواهیم داشت*

$$x\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}.$$

با فرض $x = \frac{1}{p}$ داریم

$$\frac{1}{p}\tan^{-1}(\frac{1}{p}) - \frac{1}{2}\ln((\frac{1}{p})^2+1) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

بنابراین به‌راحتی دیده می‌شود که

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{p^{2n+2}} = \sum_{n=2}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n(n-1)p^{n-1}}.$$

پس طبق فرمول فوق داریم:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}e^{-px}dx = \tan^{-1}(\frac{1}{p}) - \frac{1}{2}p\ln((\frac{1}{p})^2+1).$$

اکنون اگر وقتی‌که $p \to 0$ از طرفین حد بگیریم خواهیم داشت

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

که نتیجه‌ای شناخته‌شده است.

اکنون به کمک فرمول اصلی، همگرایی چندین انتگرال را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵.۴. فرض کنیم $f(x)=\sin(x)$. در این صورت داریم $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$. به‌عبارت‌دیگر

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\ , & n=2k, \\ (-1)^k\ , & n=2k+1. \end{cases}$$

بنابراین طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-px}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)p^{2n+1}} = \tan^{-1}(\frac{1}{p}).$$

اگر قرار دهیم $p=1$، آنگاه

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-x}dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

هم‌چنین نتیجه می‌شود

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{p\to 0^+}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-px} = \lim_{p\to 0^+}\tan^{-1}(\frac{1}{p}) = \frac{\pi}{2}.$$

مثال ۶.۴. فرض کنیم $f(x)=\frac{x^{m+1}}{m!}$. در این صورت داریم

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\ , & n\neq m+1, \\ m+1\ , & n=m+1. \end{cases}$$

بنابراین طبق فرمول اصلی داریم

$$L(x^m) = \int_0^\infty x^m e^{-px}dx = \frac{m!}{p^{m+1}}.$$

اگر قرار دهید $p=1$، آنگاه

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}dx = m! = \Gamma(m+1).$$

مثال ۷.۴. فرض کنیم $f(x) = \cos(x)$. در این صورت $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$، پس طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x}e^{-px}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2np^{2n}}.$$

از طرفی طبق سری هندسی داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{p}{p^2+1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}\\
&\Rightarrow \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}\\
&\Rightarrow \int_1^p \frac{s}{s^2+1}ds = \int_1^p \frac{1}{s}ds + \sum_{n=1}^\infty \int_1^p \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}dp\\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(\frac{p^2+1}{2}) = \ln(p) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2np^{2n}}\\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2np^{2n}} = \ln(p) - \ln(\sqrt{\frac{p^2+1}{2}}) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n} = \ln(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}}) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n}\\
&\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x}e^{-px}dx = \ln(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}}) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n}\\
&\qquad = \ln(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}}) + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}\\
&\qquad = \ln(\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}}) - \frac{1}{2}\ln 2 = \ln(\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}).
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x}e^{-px}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2np^{2n}} = \ln(\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}).$$

با فرض $p = 1$ داریم

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x}e^{-x}dx = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

مثال ۸.۴. فرض کنیم $f(x) = e^{-(a-1)x} - e^{-(b-1)x}$ و $a, b > 0$ در این صورت به‌آسانی می‌توان دید که

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}((b-1)-(a-1)).$$

پس طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(a-1)x}-e^{-(b-1)x}}{x}e^{-px}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{np^n}.$$

با فرض $p=1$ داریم

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}((b-1)-(a-1))\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(b-1)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(a-1)\\ &= \ln(b)-\ln(a)=\ln(\frac{b}{a}).\end{aligned}$$

مثال ۹.۴. فرض کنیم $f(x)=\cos(ax)-\cos(bx)$. در این صورت $f^{(2k)}(0)=(-1)^k(a^{2k}-b^{2k})$ و $f^{(2k+1)}(0)=0$. برای $p>0$ طبق فرمول اصلی داریم

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}e^{-px}dx &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(a^{2n}-b^{2n})}{2np^{2n}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}(\frac{a}{p})^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}(\frac{b}{p})^{2n}\\ &= \frac{1}{2}\ln\big(|\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}|\big).\end{aligned}$$

با حدگیری از طرفین وقتی‌که $p\to 0$ داریم

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx=\ln(\frac{b}{a}).$$

نکته ۱۰.۴. *اگر تابع g از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(x) = xg(x)$، آنگاه با توجه به قضیه لایبنیتز داریم*

$$\begin{aligned} & f^{(n)}(x) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x) \\ \to\ & f^{(n)}(0) = ng^{(n-1)}(0) \\ \to\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n-1)}(0)}{p^n} \\ \to\ & \int_0^{\infty} g(x)e^{-px}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n-1)}(0)}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

مثال ۱۱.۴. *فرض‌کنیم $g(x) = e^{-ax}$. دراین صورت طرف چپ فرمول فوق برابر است با $\int_0^{\infty} e^{-ax}e^{-px}dx = \frac{1}{p+a}$. برای طرف دوم با توجه به این‌که $g^{(n)}(0) = (-1)^n a^n$ داریم*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{p^{n+1}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{a}{p})^n = \frac{1}{p} \frac{1}{1+\frac{a}{p}} = \frac{1}{p+a}$$

که درستی آن را نشان می‌دهد.

نکته ۱۲.۴. *اگر تابع g از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(x) = xg(x)e^x$، آنگاه می‌توان نشان داد*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} g^{(k-1)}(x).$$

بنابراین طبق فرمول اصلی می‌توان نوشت

$$\int_0^{\infty} g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(0).$$

مثال ۱۳.۴. *فرض‌کنیم $g(x) = e^{-ax}$ که در آن داشته باشیم $0 < a \leq 1$. در این صورت طرف چپ فرمول فوق برابر است با $\int_0^{\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$. برای طرف دوم با توجه به این‌که $g^{(n)}(0) = (-1)^n a^n$ داریم*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k = \sum_{n=0}^{\infty} (1-a)^n = \frac{1}{a}$$

که درستی آن را نشان می‌دهد.

نکته ۱۴.۴. *برای محاسبه انتگرال*

$$I = \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} e^{-px} dx$$

کافی است قرار دهیم $g(x) = f(ax) - f(bx)$. آنگاه مطابق فرمول اصلی داریم $I = \sum_{n=1}^\infty \frac{g^{(n)}(0)}{np^n}$، اما آشکار است که $g^{(n)}(0) = (a^n - b^n)f^{(n)}(0)$. بنابراین $I = \sum_{n=1}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}(a^n - b^n)$. به‌عنوان نمونه و با شرط $p > a, b$

(الف) اگر $f^{(n)}(0) = n$، آنگاه $I = \frac{p(a-b)}{(p-a)(p-b)}$.

(ب) اگر $f^{(n)}(0) = 1$، آنگاه $I = \ln(\frac{p-b}{p-a})$.

(پ) اگر $f^{(n)}(0) = (-1)^n$، آنگاه $I = \ln(\frac{p+b}{p+a})$.

نکته ۱۵.۴. *فرض کنیم $f(0) = 0$. در این صورت به‌کمک فرمول اصلی و ضرب دو سری می‌توان تساوی زیر را نشان داد*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)f(y)}{xy} e^{-p(x+y)} dxdy = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)f^{(n-k)}(0)}{p^{n+1}(k+1)(n-k)}.$$

برای ارائه نمونه دیگر ابتدا نکته زیر موردنیاز است.

نکته ۱۶.۴. *تساوی زیر برقرار است.*

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} a_{2k} + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1} a_{2k+1}.$$

مثال ۱۷.۴. *انتگرال زیر را حساب می‌کنیم.*

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2xy} e^{-p(x+y)} dxdy.$$

درواقع انتگرال فوق چنین است

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin(x)\sin(y)}{xy} e^{-p(x+y)} dxdy.$$

که آشکار است که مقدار آن به ازای $p = 1$ برابر با $\frac{\pi^2}{16}$ است. ما در اینجا آن را به‌کمک فرمول فوق حساب می‌کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم $f(x) = \sin(x)$ و از نکته ۱۴.۴ استفاده می‌کنیم. چون $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ و $f^{(2k)}(0) = 0$ با توجه به نکته ۱۵.۴ داریم

$$I = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{p^{n+1}} \Big(\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{f^{(2k+1)}(0)f^{(n-2k)}(0)}{(2k+1)(n-2k)} + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1} \frac{f^{(2k+2)}(0)f^{(n-2k-1)}(0)}{(2k+2)(n-2k-1)} \Big).$$

اگر قرار دهیم $n=2m+1, p=1$، پس از انجام محاسبات لازم داریم

$$I=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{(-1)^{m-k}}{2(m-k)+1}$$

$$=\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\Big)=\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}.$$

برای $p>1$ دلخواه خواهیم داشت $I=\big(\tan^{-1}(\frac{1}{p})\big)^2$.

مثال ۱۸.۴ (انتگرال گوس). در اینجا انتگرال گوس را برحسب سری بیان کرده و به کمک آن نتیجه همگرایی برای چندجمله‌ای‌های هرمیت به دست می‌آوریم. برای این منظور تابع $f(x)=xe^{ax}e^{-x^2}$ را که در آن $a>1$ فرض شده است در نظر می‌گیریم. یادآوری کنیم که

$$H_n(x)=n!\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

چندجمله‌ای‌های هرمیت هستند. تابع مولد چندجمله‌ای‌های هرمیت به شرح زیر است.

$$e^{2tx-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(t)}{n!}x^n$$

اگر قرار دهیم $2t=a$، آنگاه

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\frac{a}{2})}{n!}x^{n+1}.$$

درنتیجه به‌راحتی می‌توان دید که $f^{(n)}(0)=nH_{n-1}(\frac{a}{2})$. بنابراین طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2+(a-p)x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\frac{a}{2})}{p^{n+1}}$$

که در آن $p\geq a$. ، اما می‌توان دید که

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2+(a-p)x}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{(p-a)^2}{4}}\big(1-erf(\frac{p-a}{2})\big)$$

که در آن

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

تابع خطا است. درنتیجه داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\frac{a}{2})}{p^{n+1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{(p-a)^2}{4}}\big(1-erf(\frac{p-a}{2})\big).$$

اگر قرار دهیم $p=a$، آنگاه به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\frac{p}{2})}{p^n}=\frac{p}{2}\sqrt{\pi}$$

و اگر فرض کنیم $p=2$، آنگاه خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(1)}{2^n}=\sqrt{\pi}$$

که نتیجه‌ی جالب و جدیدی درباره چندجمله‌ای‌های هرمیت است. با توجه به صورت‌های گوناگون برای $H_n(1)$ می‌توان به نتایجی اشاره کرد. به‌عنوان نمونه با توجه به فرمول

$$H_n(1)=\frac{2^{n+1}e}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}x^n\cos(\frac{n\pi}{2}-2x)dx$$

نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-x^2}x^n\cos(\frac{n\pi}{2}-2x)dx=\frac{\pi}{2e}$$

یا با توجه به فرمول

$$H_n(1)=\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(1+ix)^n dx$$

نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(1+ix)^n dx=\pi.$$

با محاسبه هر دو انتگرال بالا به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\sqrt{\pi}=1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}+\frac{23}{8}+\frac{29}{8}-\frac{103}{16}-\frac{335}{16}+\frac{257}{32}+\frac{3607}{32}\cdots.$$

در حالت کلی اگر تابع $f_m(x)=xe^{2x-x^2}(H_m(x))^2$ را در نظر بگیریم و در فرمول اصلی $p=2$ قرار دهیم، آنگاه با توجه به رابطه

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(H_m(x))^2dx=2^m m!\sqrt{\pi}$$

نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_m^{(n)}(0)}{n2^n}=2^m m!\sqrt{\pi}.$$

با فرض $m=0$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(1)}{2^n}=\sqrt{\pi}$$

که همان نتیجه بالاست چراکه $H_0(x)=1$ و با فرض $m=1$ و پس از انجام محاسبات نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)H_n(1)}{2^n}=2\sqrt{\pi}.$$

۵. نمایش دیگری از تابع گاما

تابع گاما که اولین بار توسط اویلر در سال ۱۹۲۹ معرفی شد در تمام شاخه‌های علوم ازجمله فیزیک و مهندسی کاربرد فراوان دارد. این تابع نمایش‌های مختلفی دارد که در ادامه آن‌ها را نشان می‌دهیم. در این بخش ما به کمک فرمول اصلی این نوشته، نمایش جدیدی برای آن البته برای مقادیر طبیعی به دست می‌آوریم. برای اطلاعات دقیق‌تر درباره تابع گاما مراجع [۲، ۶] را بنگرید.

(۱) نمایش اویلر:

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(۲) نمایش اویلر:

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}n^x.$$

(۳) نمایش برنولی:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(۴) نمایش وایراشتراس:

$$\Gamma(x)=\frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}},$$

که در آن

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)) = -\int_0^{\infty}e^{-x}\ln(x)dx\\ &= 2\int_0^{\infty}\frac{\cos(x^2)-\cos(x)}{x}dx\end{aligned}$$

ثابت اویلر_ماسکرونی نام دارد با مقدار تقریبی 0.577 برابر است. **نمایش جدید :** اکنون به نمایش خودمان می‌پردازیم. فرض کنیم $f(x) = x^m e^{(p-1)x}$ که در آن m یک عدد طبیعی و $p > 1$ یک عدد حقیقی است. در این صورت می‌توان نشان داد که

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)\dots(n-m+1)(p-1)^{n-m}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{np^n} &= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(p-1)^{n-m}}{np^n}\\ &= \frac{1}{p^m}\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)(\frac{p-1}{p})^{n-m} \qquad (۱.۵)\end{aligned}$$

از طرف دیگر با $(m-1)$ بار مشتق گرفتن از طرفین سری هندسی خواهیم داشت

$$\frac{(m-1)!}{(1-x)} = \sum_{n=m-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+2)x^{n-m+1} = \sum_{n=m}^{\infty}(n-1)\dots(n-m+1)x^{n-m}$$

اگر در سری فوق قرار دهیم $x = \frac{p-1}{p}$ آنگاه نتیجه می‌شود

$$(m-1)!p^m = \sum_{n=m}^{\infty}(n-1)\dots(n-m+1)(\frac{p-1}{p})^{n-m} \qquad (۲.۵)$$

اکنون از رابطه‌های (۱.۵) و (۲.۵) آشکار می‌شود که

$$\Gamma(m) = (m-1)! = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{np^n}.$$

درنتیجه داریم

$$\Gamma(m) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^n}\frac{d^n}{dx^n}\Big[\Big(x^m e^{(p-1)x}\Big)\Big]|_{(x=0)}.$$

۶. نکته‌هایی درباره سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

واضح است که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ همگراست اما تاکنون مجموع آن نامعلوم است. بنابراین این سری و مقدار مجموع آن موردتوجه ریاضیدانان است. در این بخش، ما طبق فرمولی که به دست آورده‌ایم اندکی درباره این سری صحبت می‌کنیم و آن را به‌صورت دیگری نشان می‌دهیم. اتحادی که در گزاره بعد نشان داده می‌شود ابتدا در سال ۱۶۹۷ توسط یوهان برنولی ریاضیدان سوئیسی ارائه‌شده است و به رویای دانشجوی سال دوم معروف است در مقایسه با اتحاد $(x+y)^n = x^n + y^n$ که به رویای دانشجوی سال اول یا تازه‌وارد معروف است و می‌دانیم که در حالت کلی برقرار نیست. برای اطلاعات بیشتر به [۴، ۷] مراجعه شود.

گزاره ۱.۶. *ثابت کنید*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

اثبات. برای اثبات ابتدا تغییر متغیر $x = e^{-t}$ را به کار می‌بریم. در مرحله دوم از سری مکلورن تابع‌نمایی استفاده می‌کنیم. در مرحله سوم از قضیه ۵.۱.۳ همان مرجع کمک می‌گیریم که جابجایی انتگرال و سیگما را تضمین می‌کند. در مرحله چهارم اندیس n را یک واحد منتقل می‌کنیم. در مرحله پنجم تغییر متغیر $nt = s$ را به کار می‌بریم. در مرحله آخر از این خاصیت تابع گاما کمک می‌گیریم که بیان می‌کند $\Gamma(n) = (n-1)!$.
بنا بر فرآیند گفته‌شده می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^x}dx &= \int_0^{\infty} (e^{-t})^{-e^{-t}} e^{-t}dt = \int_0^{\infty} e^{te^{-t}} e^{-t}dt \\
&= \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n e^{-nt}\right] e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-(n+1)t}dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-nt}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} n^{-n} \int_0^{\infty} s^{n-1}e^{-s}ds \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} n^{-n}\Gamma(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.
\end{aligned}$$

□

هم‌چنین می‌توان نشان داد

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^x}dx = \int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{x^x}dx.$$

اکنون تابع $f(x) = xe^{xe^{-x}}e^x$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $g(x) = xe^{xe^{-x}}$ و $h(x) = e^x$.
طبق فرمول اصلی داریم

$$\int_0^{\infty} e^{xe^{-x}} e^x e^{-px}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{np^n}$$

اما $h^{(n)}(0) = 1$ و با اندکی محاسبات نتیجه زیر را به دست می‌آوریم.

$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(1-k)^{n-k}$$

که در آن $n \geq 2$. اکنون بنا بر قاعده لایبنیتز خواهیم داشت

$$f^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(0).$$

درنتیجه داریم

$$f^{(n)}(0)=n+\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{r}r(1-r)^{k-r}.$$

با فرض $p=2$ و با توجه به گزاره ۱.۶ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=\int_0^{\infty}e^{xe^{-x}}e^{-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}f^{(n)}(0)$$

درنتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n2^n}f^{(n)}(0)=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\left[n+\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{r}r(1-r)^{k-r}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\frac{1}{n2^n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}r(1-r)^{k-r}$$

درنهایت داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\frac{1}{n2^n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}r(1-r)^{k-r}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{n}\sum_{r=2}^{k}\frac{1}{2^n}\binom{n-1}{n-k,k-r,r-1}(1-r)^{k-r}$$

که بیان دیگری از این سری معروف است که شاید به یافتن مقدار مجموع آن کمک کند.

نکته ۲.۶. *در انتها انتگرال معروف دیگری را به دست می‌آوریم.*

$$\frac{1}{x^x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n\ln^n x}{n!}$$

درنتیجه

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx$$

با توجه به گزاره ۱.۶ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

اکنون اگر قرار دهیم

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}},$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\int_0^1 x^n \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

که نتیجه درستی است چراکه حالت خاصی از فرمول زیر است

$$\int_0^1 x^m \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

سپاس‌گزاری

نویسنده وظیفه اخلاقی خود می‌داند تا از داور محترم این مقاله، به‌خاطر نظرات وسازنده‌اشان که در غنی‌تر شدن محتوای مقاله نقشی شایسته داشت، تشکر و قدردانی نماید. همچنین بدینوسیله از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه $(GN : SCU.MM403 \cdot 648)$ در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌گردد.

مراجع

1. A. Apelblat, *Application of Laplace transformation to evaluation of integrals*, J. Math. Anal. Appl. **186** (1994), 237–253.
2. E. Artin, *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
3. H. Bateman, A. Erdélyi, W. Magnus, and F. Oberhettinger, *Tables of integral transforms*, Vol. 1, McGraw Hill, New York, 1954.
4. J.M. Borwein, D.H. Bailey and R. Girgensohn, *Experimentation in mathematics: Computational paths to discovery*, AK Peters Ltd, 2004.
5. W.E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 10 edition, Wiley, 2012.
6. O.J. Farrell and B. Ross, *Solved problems in analysis*, Dover Publications Inc. New York, 1971.
7. O. Hijab, *Introduction to calculus and classical analysis*, Springer, 2007.

8. E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Wiley, 1998.
9. W. A. Pribitkin, *Laplace's integral, the Gamma function, and beyond*, Amer. Math. Monthly, **109** (2002), no. 3, 235–245.
10. J. L. Schiff, *The Laplace transform: Theory and applications*, Springer Science and Business Media, 1999.
11. G.F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, 2nd Edition ,McGraw-Hill, 1991.
12. D. Verma, *Relation between Beta and Gamma function By using Laplace transformation*, Researcher, **10**(2018) no. 7, 72–74.